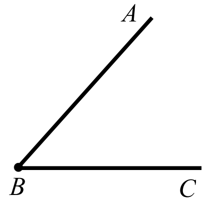
Построение угла, равного данному

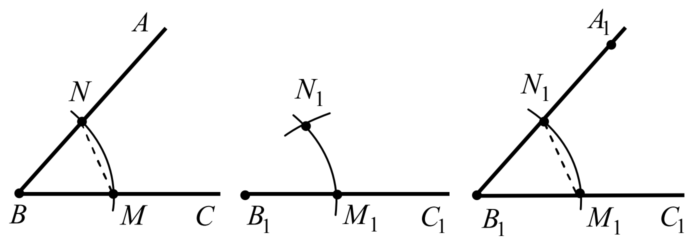
Дано: $\angle ABC$.



Построить: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Построение

Проведем луч B_1C_1. Построим окружность с центром в вершине B и произвольным радиусом r. Она пресекает стороны $\angle ABC$ в точках M и N. Затем проведем окружность с центром в начале луча B_1C_1 и тем же радиусом. Она пересекает луч B_1C_1 в точке M_1. После этого построим окружность с центром в точке M_1, радиус которой равен MN. Окружности с центрами B_1 и M_1 пересекаются в двух точках, одну из которых обозначим N_1. Проведем луч B_1N_1 и возьмем на нем точку A_1. $\angle A_1B_1C_1$ – искомый.



1) луч B_1C_1;
2) $\omega(B; r)$, r – произвольный радиус;
   $\omega(B; r) \cap BC = M$; $\omega(B; r) \cap BA = N$;
3) $\omega(B_1; r)$; $\omega(B_1; r) \cap B_1C_1 = M_1$;
4) $\omega(M_1; MN)$; $\omega(M_1; MN) \cap \omega(B_1; r) = N_1$;
5) луч B_1N_1, точка $A_1 \in B_1N_1$;
   $\angle A_1B_1C_1$ – искомый.

Доказательство

Проведем отрезки MN и M_1N_1.

Рассмотрим получившиеся треугольники BNM и $B_1N_1M_1$.

$BN = BM$ как радиусы окружности с центром B. $B_1N_1 = B_1M_1$ как радиусы окружности с центром B_1. Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $BN = B_1N_1$, $BM = B_1M_1$. Также по построению $MN = M_1N_1$.

Следовательно, $\Delta\ BNM$ и $\Delta\ B_1N_1M_1$. по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle N_1B_1M_1 = \angle NBM$, отсюда $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.