Перпендикулярные прямые. Определение, построение прямой, перпендикулярной данной

Две прямые на плоскости называются ***перпендикулярными*** (или взаимно перпендикулярными), если они пересекаются под прямым углом.

Возможны два случая.

1) Точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной лежит на прямой.

2) Точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной не лежит на прямой.

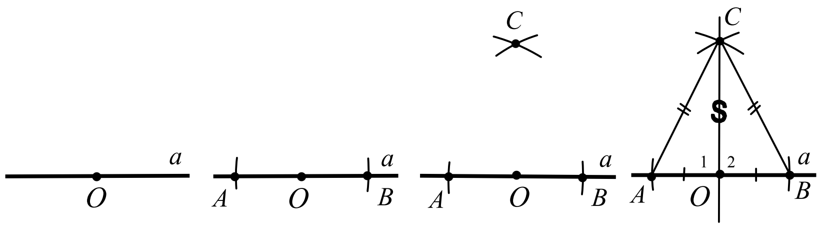
Рассмотрим первый случай, когда точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной лежит на прямой.

Дано: точка $O \in a$.

Построить: прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O.

Построение

Проведем окружность произвольного радиуса r с центром в точке O. Она пересекает прямую a в точках A и B Проведем две окружности с центрами в точках A и B произвольного радиуса $r_1 > \frac{1}{2}AB$. Точку пересечения окружностей обозначим через C. Проведем прямую OC – это и будет искомая прямая.



1) $\omega(O; r)$, r – произвольный радиус, $\omega(O; r) \cap a = A; B$;

2) $\omega(A; r_1)$, $\omega(B; r_1)$, $r_1 > \frac{1}{2}AB$, $\omega(A; r_1) \cap \omega(B; r_1) = C$;

3) OC – искомая прямая.

Доказательство

Проведем отрезки AC и BC.

Рассмотрим получившиеся треугольники AOC и BOC.

$OA = OB$ как радиусы окружности с центром в точке O, $AC = BC$ по построению, OC – общая сторона.

Следовательно, $\Delta\, AOC = \Delta\, BOC$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ смежные и равны, поэтому каждый из них по 90°. Значит, $OC \perp a$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

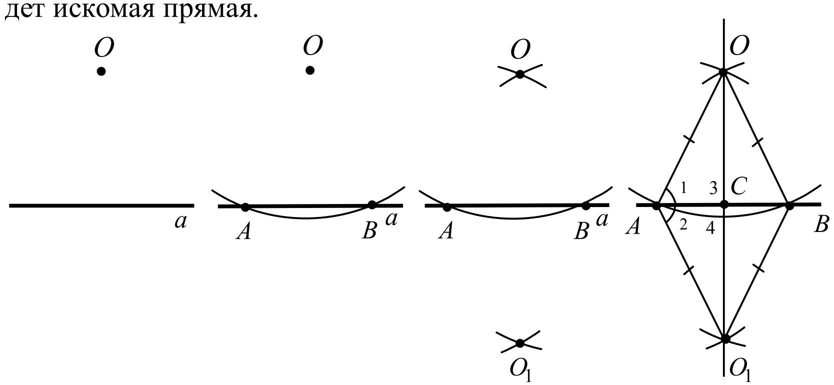
Рассмотрим второй случай, когда точка, через которую нужно провести прямую перпендикулярную данной не лежит на прямой.

Дано: точка $O \notin a$.

Построить: прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку O.

Построение

Проведем окружность с центром в точке O и произвольным радиусом r, но большим, чем расстояние от точки O прямой a. Окружность пересекает прямую a в точках A и B. Проведем две окружности с центрами в точках A и B тем же радиусом r. Они пресекаются в точках O и O_1. Проведем прямую OO_1 – это и будет искомая прямая.



1) $\omega(O; r)$, r – произвольный радиус, но больший, чем расстояние от точки O прямой a, $\omega(O; r) \cap a = A; B$;

2) $\omega(A; r)$, $\omega(B; r)$, $\omega(A; r) \cap \omega(B; r) = O; O_1$;

3) OO_1 – искомая прямая.

Доказательство

Обозначим точку пересечения прямых a и OO_1 через C. Проведем отрезки AO, BO, AO_1 и BO_1.

Рассмотрим $\Delta\, AOB$ и $\Delta\, AO_1B$.

$AO = AO_1$ как радиусы окружности с центром в точке A, $BO = BO_1$ как радиусы окружности с центром B, AB – общая сторона.

Следовательно, $\Delta\, AOB = \Delta\, AO_1B$ по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Рассмотрим $\Delta\, OAC$ и $\Delta\, O_1AC$.

$AO = AO_1$ как радиусы окружности с центром в точке A, $\angle 1 = \angle 2$ по доказанному выше, AC – общая сторона.

Следовательно, $\Delta\, OAC = \Delta\, O_1AC$ по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 3$ и $\angle 4$ смежные и равны, поэтому каждый из них по 90°. Значит, $O\,O_1 \perp a$.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.